2007 年 12 月第 1 版、 2013 年 12 月増補第 5 版、2015 年 11 月改定第 6 版

順天サイエンスライブラリ５

線形漸化式とその周辺

目次

§1．特殊解と一般解

$\boxed{1}$　　漸化式と付帯条件を分離しよう。

数列の帰納的定義は、漸化式と付帯条件がセットになっている。

$a_{n+1}=2a_n+3\cdots$①、$a_1=2\cdots$②

通常、まず付帯条件②を最初に用いて初項を定め、次に漸化式①の$n=1$の場合を用いて$a_2=2a_1+3=7$と第2項を定め、更に①の$n=2$の場合を用いて$a_3=2a_2+3=17$と第3項を定め・・・と、数学的帰納法の証明と類似の論理で数列の各項を順番に定めていくのであった。ここでは、付帯条件無しの漸化式だけで、何が定まるか、考えてみよう。

まず、漸化式①はただひとつの式のように見えるが、実際には数限りない数の等式の集合体であることに注目しよう。実際$n=1,2,3,\cdots$のときの式は

$a_2=2a_1+3\cdots$①（1）

$a_3=2a_2+3\cdots$①（2）

$a_4=2a_3+3\cdots$①（3）

・・・

とあらわせる。①（1）は2つの変数a_1,a_2についての式である。この式だけに注目すると、2つの変数に対して1つの式が条件として書かれているので、2つの変数の値を決めるのには不十分で、1つ変数が定まらない。次に、①（1）（2）に注目すると、3つの変数a_1,a_2,a_3に対して、式が2つ条件として連立方程式で表されているので、これも同様に1つだけ定まらない変数が残る。以下同様に$n=1,2,3,\cdots,k$までの式を考えると、$k+1$個の変数$a_1,a_2,a_3\cdots,a_{k+1}$に対して$k$個の条件が連立方程式として課せられているので、1つだけ定まらない変数が残る。これらk個の式を満たす$k+1$個の変数$a_1,a_2,a_3\cdots,a_{k+1}$はひとつの自由に決められる文字（αとしよう）を用いてすべて表すことができる。この文字のことを***<u>パラメータ</u>***という。kはどんな自然数でも良いから、数列のすべての項a_nはひとつのパラメータαを用いて表すことができる。漸化式①を満たす数列をすべて漸化式の***<u>解</u>***というが、その中でパラメータを含む解を漸化式①の***<u>一般解</u>***という。

この例では$a_n=\alpha\cdot 2^{n-1}-3\cdots$③と置くと

$2a_n+3=2\left(\alpha\cdot 2^{n-1}-3\right)+3=\alpha\cdot 2^n-3=a_{n+1}$

となるから漸化式①を満たし、解はパラメータαを含むから一般解である。

付帯条件②を満たすような解は一般解③を付帯条件に代入してαを定めることによって得られる。

$a_1=\alpha\cdot 2^{1-1}-3=\alpha-3=2,\ \alpha=5$。$a_n=5\cdot 2^{n-1}-3$。

一般解のパラメータにある値を代入してできる漸化式の解を***<u>特殊解</u>***という。今得られた解$a_n=5\cdot 2^{n-1}-3$は一般解③に$\alpha=5$を代入してできた特殊解である。

このように、漸化式と付帯条件で定まる数列は、まず漸化式の一般解を求めた後で、付帯条件に合うようにパラメータを定めた特殊解であると考えることができる。

3項間漸化式$a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n\cdots$④は$n=1$から順番に考えると、式の本数よりも変数が2個多い連立方程式

と考えられるから、２つのパラメータを用いた一般解が存在する。

練習０　$a_n = \alpha + \beta \cdot 2^{n-1}$ が漸化式④の一般解であることを示せ。また漸化式④と付帯条件 $a_1 = 2,\ a_2 = 3 \cdots$⑤を満たす特殊解を求めよ。　（答：$a_n = 1 + 2^{n-1}$）

同様に、k 項間漸化式には $k-1$ 個のパラメータを含む一般解が存在する。

§２．斉次線形漸化式、重解のない場合

$\boxed{2}$　　重ね合わせの原理（1）

漸化式 $a_{n+1} = ra_n \cdots$⑥は等比数列の漸化式であるが、線形性という性質も持っている。

定理（漸化式⑥の線形性）：$a_n^{(1)}, a_n^{(2)}$ の２つの数列が、どちらも漸化式⑥の解であるとする。このとき $a_n^{(3)} = \alpha a_n^{(1)} + \beta a_n^{(2)}$ も同じ漸化式の解である。（α、βは定数）

証明：　$ra_n^{(3)} = r\left(\alpha a_n^{(1)} + \beta a_n^{(2)}\right) = \alpha ra_n^{(1)} + \beta ra_n^{(2)}$ であるが、$a_n^{(1)}, a_n^{(2)}$ がともに漸化式⑥の解であることから

$$ra_n^{(1)} = a_{n+1}^{(1)},\ ra_n^{(2)} = a_{n+1}^{(2)}$$

したがって

$$ra_n^{(3)} = \alpha ra_n^{(1)} + \beta ra_n^{(2)} = \alpha a_{n+1}^{(1)} + \beta a_{n+1}^{(2)} = a_{n+1}^{(3)}$$

となり、$a_n^{(3)}$ が漸化式⑥の解であることが示された。(直接等比数列の形を用いたほうがわかりやすいかもしれないが、以下で述べる一般化がしやすいような証明を紹介した。)

漸化式 $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n \cdots$④も同様の線形性を持っている。

練習１　$a_n^{(1)}, a_n^{(2)}$ の２つの数列が、どちらも漸化式 $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n \cdots$④の解であるとする。このとき $a_n^{(3)} = \alpha a_n^{(1)} + \beta a_n^{(2)}$ も同じ漸化式の解であることを示せ。（α、βは定数）

線形性は $a_n^{(1)}, a_n^{(2)}$ という漸化式の２つの解を***重ね合わせ***て新しい解 $a_n^{(3)} = \alpha a_n^{(1)} + \beta a_n^{(2)}$ を作るのに使われる。

漸化式 $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n \cdots$④の線形性を利用して、漸化式④の一般解を求めることができる。まず、等比数列 $a_n = r^{n-1}$ が漸化式④を満たすような、公比 r の値を求めよう。④に等比数列の式を代入して

$$r^{n+1} = 3r^n - 2r^{n-1}$$

両辺を r^{n-1} で割って $r^2 = 3r - 2$。２次方程式 $r^2 - 3r + 2 = 0$（この方程式を漸化式④の***特性方程式***という。）を解いて $r = 1,2$。この r の値（特性方程式の解）を***特性根***ということがある。このことから $a_n^{(1)} = 1^{n-1} = 1,\ a_n^{(2)} = 2^{n-1}$ はどちらも漸化式④の解であることがわかる。漸化式の線形性を用いて解を重ね合わせると $a_n^{(3)} = \alpha a_n^{(1)} + \beta a_n^{(2)} = \alpha + \beta \cdot 2^{n-1}$ も漸化式④の解である。そして、この解にはα、βという２つのパラメータが含まれているので一般解である。

3　斉次線形漸化式の解法１

漸化式を数列の項を変数とする多項式と見よう。漸化式が定数項を含まない 1 次式である（すべての項に $a_{ナントカ}$がひとつだけ含まれて$a_{ナントカ}{}^2$のような項もなく、$a_{ナントカ}$が含まれない定数項もない）とき、斉次線形漸化式であるという。

$$a_{n+1}=3a_n$$

$$a_{n+2}=4a_{n+1}+6a_n$$

$$a_{n+7}-a_{n+3}+5a_{n+2}-7a_n=0$$

はそれぞれ斉次線形 2 項間、3 項間、8 項間漸化式である。斉次線形漸化式はすべて線形性を持つので、解を重ね合わせることができる。斉次線形漸化式のほとんどは次のような手順で解くことができる。

例題 1

例題として $a_{n+2}=3a_{n+1}+10a_n\cdots$⑦、$a_1=4,\ a_2=3\cdots$⑧を取り上げよう。

(1)漸化式に公比 r の等比数列 $a_n=r^{n-1}$ を代入して、公比 r の満たす方程式（特性方程式）を求める。

例題では特性方程式は $r^2-3r-10=0$ である。一般に k 項間漸化式の特性方程式は $k-1$ 次方程式になる。

(2)特性方程式の解（特性根）を用いて、できるだけたくさんの等比数列の解を作る。

例題では特性方程式の解が 2 つ $(r=-2{,}5)$ あるので、2 つの等比数列の解 $a_n^{(1)}=(-2)^{n-1},\ a_n^{(2)}=5^{n-1}$ を作ることができる。これらの解は(まだ)パラメータを含まないから特殊解の一種である。一般に $k-1$ 次方程式は $k-1$ 個の解を持つので $k-1$ 個の等比数列の特殊解を作ることができる。

(3)漸化式の線形性を用いて、等比数列の特殊解を重ね合わせる。こうしてできた解は一般解である。

例題では 2 つの等比数列の解を重ね合わせて $a_n^{(3)}=\alpha a_n^{(1)}+\beta a_n^{(2)}=\alpha\cdot(-2)^{n-1}+\beta\cdot 5^{n-1}$。漸化式⑦は 3 項間漸化式であるから、2 個のパラメータを含む解は一般解である。一般に k 項間漸化式では $k-1$ 個の等比数列の解を重ね合わせるので、パラメータ(それぞれの等比数列の解の前にかかる係数)が $k-1$ 個含まれるから一般解である。

(4)付帯条件を用いて一般解のパラメータの値を決定し、特殊解を求める。

例題では $a_n=\alpha\cdot(-2)^{n-1}+\beta\cdot 5^{n-1}$ に $n=1{,}2$ を代入して $a_1=\alpha\cdot(-2)^0+\beta\cdot 5^0=\alpha+\beta=4$

$a_2=\alpha\cdot(-2)^1+\beta\cdot 5^1=-2\alpha+5\beta=3$。連立方程式を解いて $\alpha=\dfrac{17}{7},\ \beta=\dfrac{11}{7}$。

求める特殊解は $a_n=\dfrac{17}{7}\cdot(-2)^{n-1}+\dfrac{11}{7}\cdot 5^{n-1}$。

練習 2　例題と同様の手順で、次の漸化式と付帯条件で定まる数列（特殊解）を求めよ。

（1） $a_{n+1}=5a_n$，$a_1=4$　（答： $a_n=4\cdot 5^{n-1}$）

（2） $a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$，$a_1=5,\ a_2=1$　（答： $a_n=\dfrac{11}{5}\cdot 3^{n-1}+\dfrac{14}{5}\cdot(-2)^{n-1}$）

（3） $a_{n+3}=6a_{n+2}-11a_{n+1}+6a_n$，$a_1=3,\ a_2=6,\ a_3=14$　（答： $a_n=1+2^{n-1}+3^{n-1}$）

$\boxed{4}$　　斉次線形漸化式の解法２

特性方程式はrの高次方程式だから、特性根は無理数や虚数の場合もある。

例題２

特性根が無理数となる数列の中には、歴史的に有名な数列が含まれている。

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n,\ a_1=a_2=1$$

連続する２項の和が次の項になるという規則で生成される数列で、初項から

１，１，２，３，５，８，１３，２１，３４，５５，８９，１４４・・・

と続く数列である。

フィボナッチ数列といわれるこの数列は自然科学や社会科学のいろいろな場面に顔を出す数列である。帰納的定義のやり方から見て、当然すべての項は自然数であるが、一般項を表すには無理数を用いる必要がある。解を求めるやり方は例題１とまったく同様である。

(1)特性方程式は$r^2-r-1=0$である。

(2)2 次方程式を解いて特性根$r=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$を得る。この特性根は***黄金比***と呼ばれる無理数である。

(3)この漸化式の一般解は$a_n=\alpha\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+\beta\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$である。

(4)付帯条件に代入してパラメータの値を決定し、特殊解を求める。

$$a_1=\alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0+\beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0=\alpha+\beta=1\cdots⑦$$

$$a_2=\alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1+\beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1=\alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+\beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=1\cdots⑧$$

連立方程式を解くために⑦の両辺に$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$をかけたものから⑧を引くと

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\beta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1,\ \beta=-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

⑦の両辺に$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$をかけたものから⑧を引くと

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\alpha=\frac{1-\sqrt{5}}{2}-1,\ \alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

これらを代入して$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$

複雑な無理数を組み合わせて、自然数が次々と形成されていく様子をぜひ味わってみよう。

例題３

$$a_{n+2}=-a_{n+1}-a_n,\ a_1=a_2=1$$

この数列は初項から順に、１，１，－２，１，１，－２，１，１，－２・・・と３項ごとに同じ数字が繰り返し現れる周期的な数列である。このような数列は、実数の特性根では実現できない。

標準的な解法に従って特殊解を求めてみよう。

(1)特性方程式は$r^2+r+1=0$。この方程式の両辺に$r-1$をかけると$r^3-1=0$となるので、この特性方程式は１の虚数の立方根を求める方程式である。

(2)特性根は$r=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$。これらは１の虚数の立方根でそのうちのひとつをωと表すと、もう一方はω^2である。

(3)漸化式の一般解は$a_n=\alpha\omega^{n-1}+\beta\omega^{2(n-1)}$である。

(4)付帯条件に代入すると$a_1=\alpha+\beta=1,\ a_2=\alpha\omega+\beta\omega^2=1$。連立方程式を加減法で解く。$a_1\omega-a_2=\beta\omega(1-\omega)=\omega-1$だから$\beta=-\dfrac{1}{\omega}=-\omega^2$。また$a_1\omega^2-a_2=\alpha\omega(\omega-1)=\omega^2-1$であるから$\alpha=\dfrac{\omega+1}{\omega}=-\omega$。

求める特殊解は$a_n=-\omega^n-\omega^{2n}$。

ωを用いずに具体的に表すと$a_n=-\left\{\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n+\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n\right\}$。

高次方程式の単元で学んだ虚数の１の立方根の性質

$$\omega^{2n}+\omega^n+1=\begin{cases}0 & (n\text{は3の倍数でない})\\ 3 & (n\text{は3の倍数})\end{cases}$$

を思い出すと、周期的な数列の現れる理由が理解できよう。

また、この漸化式の解は付帯条件に関わらず必ず周期３の数列になることも、ωの性質から説明することができる。

$$a_{n+3}=\alpha\omega^{(n+3)-1}+\beta\omega^{2((n+3)-1)}=\alpha\omega^{n-1}\omega^3+\beta\omega^{2(n-1)}\omega^6$$

ここで$\omega^3=\omega^6=1$であるから

$$=a_n$$

練習３　特性根を持ち出さなくても、漸化式だけを用いて$a_{n+3}=a_n$であることを証明できる。証明せよ。

（略解：$a_{n+3}=-a_{n+2}-a_{n+1}=-(-a_{n+1}-a_n)-a_{n+1}=a_n$）

練習４　漸化式$a_{n+2}=-a_{n+1}+a_n$と付帯条件$a_1=a_2=1$で定められる数列の一般項を求めよ。

（答：$a_n=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\cdot\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\cdot\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$）

練習５　漸化式$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$と付帯条件$a_1=a_2=1$で定められる数列の一般項を求めよ。この漸化式の解となる数列は$a_{n+6}=a_n$を満たす周期６の数列であることを示せ。

（答：$a_n=\dfrac{\sqrt{3}-i}{2\sqrt{3}}\cdot\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{\sqrt{3}+i}{2\sqrt{3}}\cdot\left(\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-1}$。後半の証明は$\left(\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}\right)^6=1$を利用するか、漸

化式を用いて $a_{n+6}=-a_{n+3}$ を示す。)

§3. 斉次線形漸化式、重解のある場合

$\boxed{5}$　　定数変化法

前節までで、斉次線形漸化式の大部分は解けるようになったが、残念ながら厄介な例外が存在する。これはあくまでも例外なので、全体像を早くつかみたい者は無視してもかまわない。しかし、数学のレクチャーの宿命として、完全性を求めてしまうので、厄介とは知りつつ、この話題も取り上げることにした。

災害はさりげない顔をして忍び込んでくるものだ。このやっかいな場合も、今までおなじみの漸化式と同じような顔をしている。

例題 4

$$a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n,\ a_1=a_2=1$$

まずは、標準的な解法を試みよう。

(1)特性方程式は $r^2=4r-4,\ r^2-4r+4=0$。因数分解できる簡単な 2 次方程式である。

(2) $(r-2)^2=0$ であるから、$r=2$ である。この特性根は**重根**(重解のこと)である。特性根がひとつしかないので、次の段階で支障が生じる。

(3)今までは 2 つの異なる特性根を用いて、2 つの異なる解を重ね合わせて一般解を作っていたのだが、今回は解が 1 種類しかないので、無理やり $a_n=\alpha\cdot 2^{n-1}$ とするしかない。しかし、この解はパラメータをひとつしか含んでいないので、2 つの付帯条件に同時に対応することができない。たとえば付帯条件 $a_1=1$ を満たすように $\alpha=1$ と置くと、$a_2=1\cdot 2^1=2$ となって、与えられた付帯条件と矛盾する。

実は高次方程式が重解を持つ場合は、数学のいろいろな分野で例外を引き起こす厄介な問題なのである。今までと違う方法を開発しないと、例外には対応できない。漸化式の分野で、緊急事態が起こった場合にまず試してみる方法が、***定数変化法***である。

定数変化法は今まで定数であったパラメータを n に依存する数列に置き換えるという方法である。

例題 4 では $a_n=p_n\cdot 2^{n-1}$ とおく。ここで(3)のパラメータ α を数列 p_n で置き換えた。次に、この式を元の漸化式に代入して p_n の満たす漸化式を求める。

$$p_{n+2}\cdot 2^{n+1}=4p_{n+1}\cdot 2^n-4p_n\cdot 2^{n-1}$$

両辺を 2^{n+1} で割って

$$p_{n+2}=2p_{n+1}-p_n$$

移項して

$$p_{n+2}-2p_{n+1}+p_n=0\cdots⑨$$

なんだかあまり進歩が無いようで、似たような漸化式が出てきた。この漸化式の特性方程式をとっても $r^2-2r+1=0$ となり、重解が 2 から 1 に変わっただけで何も進展がない。そろそろまったく違った切り口を用意するころあいである。

6　　階差数列

数列 a_n の隣り合う項の差をとってできる数列を***第１階差数列***という(ある数列の第１階差数列を求めることを、数列を***差分する***と言う。)。数列 a_n の第１階差数列の一般項を $b_n^{(1)}$ と置くと

$$b_n^{(1)} = a_{n+1} - a_n$$

である。

階差数列が既知の場合、階差数列の定義式は元の数列 a_n の 2 項間漸化式である。付帯条件がない場合はその解は一般解となるのでパラメータをひとつ含む。階差数列を知ってもとの数列を求めることを***和分***といい、その際に現れるパラメータを***和分定数***という。

第 1 階差数列の一般項が 0 である数列の一般項は定数である。また、一般項が定数の数列の第 1 階差数列の一般項は 0 である。

$$b_n^{(1)} = 0 \Leftrightarrow a_n = C \quad \text{（C は和分定数）}$$

さらに、第 1 階差数列の一般項が(0 でない)定数であるような数列の一般項は(等差数列であるから) n の 1 次式である。逆も成り立つ。同様に、第１階差数列の一般項が n の k 次式であるような数列の一般項は n の $k+1$ 次式である。これも逆が成り立つ。

第１階差数列の差分を***第２階差数列***という。数列 a_n の第２階差数列の一般項を $b_n^{(2)}$ と置くと

$$b_n^{(2)} = b_{n+1}^{(1)} - b_n^{(1)} = a_{n+2} - a_{n+1} - (a_{n+1} - a_n) = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$$

この段階で、例題４は解決している。

なぜなら、ここで第２階差数列の定義式を例題４の式⑨と見比べると、⑨は数列 p_n の第２階差数列の一般項が０であると読むことができる。ということは同じ数列の第１階差数列は定数であり、元の数列の一般項 p_n は１次式である。つまり

$$p_n = \alpha n + \beta \cdots ⑩$$

と表せる。また、上の性質はすべて逆が成り立つからこの形の数列はすべて漸化式⑨を満たすので、これは一般解である。

練習６　直接漸化式⑨に代入することにより⑩が一般解であることを確かめよ。

定数変化法の定義式に代入して例題４の一般解が

$$a_n = (\alpha n + \beta) \cdot 2^{n-1}$$

であることがわかる。

練習７　上の式を用いて、例題４で定められる数列の特殊解を求めよ。

これで例題４は解決した。

更に階差数列の話を続けよう。

第２階差数列を差分したものを第３階差数列といい、以下同様に第 k 階差数列を定める。数列 a_n の第 k 階差

数列の一般項を$b_n^{(k)}$と表すと、第３階差数列$b_n^{(3)}$は

$$b_n^{(3)}=b_{n+1}^{(2)}-b_n^{(2)}=a_{n+3}-2a_{n+2}+a_{n+1}-\left(a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n\right)$$

$$=a_{n+3}-3a_{n+2}+3a_{n+1}-a_n。$$

この例からわかるとおり、階差数列の一般項を元の数列で表すと２項定理の係数（$(1+x)^k$の展開式の係数）が現れる。一般に

$$b_n^{(k)}={}_kC_0a_{n+k}-{}_kC_1a_{n+k-1}+{}_kC_2a_{n+k-2}-\cdots+(-1)^k{}_kC_ka_n$$

である。$b_n^{(k)}$が０のとき、$b_n^{(k-1)}$は(0を含む)定数であり、$b_n^{(k-2)}$はnの１次以下の式であり、$\cdots b_n^{(1)}$はnの$k-2$次以下の式であり、そしてa_nはnの$k-1$次以下の式である。従ってk個のパラメータを用いて

$$a_n=\alpha_0+\alpha_1n+\alpha_2n^2+\cdots+\alpha_{k-1}n^{k-1}$$

と表せる。

7　斉次線形漸化式の解法３

前の２節で調べたことにより、特性方程式が多重根を持つ場合の解法が明らかになった。まず、例題を用いて確認しよう。

例題５

$a_{n+3}-9a_{n+2}+27a_{n+1}-27a_n=0$の一般解を求めよ。

(1)特性方程式は$r^3-9r^2+27r-27=0$。

(2)因数分解して$(r-3)^3=0,\ r=3$(3重解)。

(3’)定数変化法を用いて$a_n=p_n\cdot 3^{n-1}$と置く。p_nの満たす漸化式は$p_{n+3}-3p_{n+2}+3p_{n+1}-p_n=0$。

(4’) p_nの第３階差数列の一般項が０であるから、p_nはnの２次以下の式なので

$$p_n=\alpha n^2+\beta n+\gamma$$

と表せる。

(5)定数変化法の定義式に代入して$a_n=\left(\alpha n^2+\beta n+\gamma\right)\cdot 3^{n-1}$

上記の解法において(2)で３重解が現れた時点で3^{n-1}の係数がnの２次以下の式になることは確定しているので、(2)から直接一般解を書き下してかまわない。

まとめ　一般の斉次線形漸化式の解法

(1)特性方程式を求める

(2)特性根、$r_1,\ r_2,\ r_3\cdots$を求める。k項間漸化式ならば、l重解をl個と数えれば、必ず$k-1$個の特性根が存在する。

(3)重解でない特性根r_iについては、等比数列の解r_i^{n-1}を対応させる。l重解である特性根r_jについてはl個の解$r_j^{n-1},\ nr_j^{n-1},\ n^2r_j^{n-1},\ \cdots,\ n^{l-1}r_j^{n-1}$を対応させ、これらをすべて重ね合わせて$k-1$個のパラメータ

を含む一般解を作る。

(4) $k-1$ 個の付帯条件を用いてできる $k-1$ 元連立方程式を解いて、特殊解を求める。

練習 8　次の漸化式と付帯条件で定まる数列の特殊解を求めよ。

(1) $a_{n+4}+8a_{n+3}+24a_{n+2}+32a_{n+1}+16a_n=0,\ a_1=a_2=a_3=0,\ a_4=-48$

答：$a_n=\left(n^3-6n^2+11n-6\right)\cdot(-2)^{n-1}$

(2) $a_{n+4}-8a_{n+2}+16a_n=0,\ a_1=a_2=2,\ a_3=16,\ a_4=24$

答：$a_n=n\cdot 2^{n-1}+(-2)^{n-1}$

§4. 非斉次線形漸化式

$\boxed{8}$　重ね合わせの原理（２）

斉次線形漸化式 $a_{n+1}=2a_n$ の一辺に、数列の項 $a_{ナントカ}$ を含まない項を加えた漸化式を考えよう。たとえば

$a_{n+1}=2a_n+3\cdots$⑪,　　$a_{n+1}=2a_n-(n-1)\cdots$⑫

のようなものである。これらを***線形非斉次漸化式***という。$a_{ナントカ}$ を含まない項（⑪では３、⑫では $-(n-1)$）を***非斉次項***という。

$a_n^{(1)}=-3$ は漸化式⑪の特殊解である。また $a_n^{(2)}=n$ は漸化式⑫の特殊解である。（それぞれの数列がそれぞれの漸化式の解であることは代入すればわかる。また、どちらの解のもパラメータが含まれていないので、一般解ではなく特殊解である。）

練習 9　$a_n^{(1)}=-3$，$a_n^{(2)}=n$ が漸化式⑪、⑫の解であることを代入して確かめよ。

次に 2 つの解の足し算 $a_n^{(3)}=a_n^{(1)}+a_n^{(2)}$ を考える。ここでは $a_n^{(3)}=-3+n$ である。この数列は斉次線形漸化式の右辺に漸化式⑪と⑫の非斉次項を加えてできる漸化式

$a_{n+1}=2a_n+3-(n-1)=2a_n-n+4\cdots$⑬

の特殊解であることがわかる。

練習 10　$a_n^{(3)}$ が漸化式⑬の特殊解であることを、代入によって確かめよ。

$a_n^{(3)}$ が⑬の解であることは $a_n^{(3)}$ の具体的な形を代入せずに示すことができる。

証明：$a_{n+1}^{(3)}=a_{n+1}^{(1)}+a_{n+1}^{(2)}$　　（$a_n^{(3)}$ の定義）

$=\left\{2a_n^{(1)}+3\right\}+\left\{2a_n^{(2)}-(n-1)\right\}$　　（$a_n^{(1)},a_n^{(2)}$ がそれぞれ⑪、⑫の解であることを用いた）

$=2\left\{a_n^{(1)}+a_n^{(2)}\right\}-n+4$

$=2a_n^{(3)}-n+4$　　（$a_n^{(3)}$ の定義）

であるから、$a_n^{(3)}$ は漸化式⑬の解である。

この性質も線形漸化式の特徴で、やはり***重ね合わせの原理***と呼ばれる。

2 項間線形漸化式の重ね合わせの原理についてまとめておこう。

定理

p, q, r を定数、 f_n, g_n を既知の数列（たいていは一般項がすでに n の式で表されている）とする。

線形漸化式 $a_{n+1} = ra_n + f_n$ の特殊解のひとつの一般項を b_n 、 $a_{n+1} = ra_n + g_n$ の特殊解のひとつの一般項を c_n と置くとき

$$d_n = pb_n + qc_n$$

で一般項が定義される数列は、漸化式 $a_{n+1} = ra_n + pf_n + qg_n$ の特殊解のひとつである。

練習 11　例の証明にならってこの定理を証明せよ。

3 項間漸化式などでも同様の定理が成り立つ。

$\boxed{9}$　線形非斉次漸化式の解法(1)

重ね合わせの原理を用いて線形非斉次漸化式を解いてみよう。

例題 6

$$a_{n+1} = 2a_n + 3,\ a_1 = 2$$

この例題は数学 B の授業でも嫌というほど解いた形の漸化式だが、今一度新しい見方で見直してみよう。

授業や教科書とは異なり、われわれはこの問題を今までと同様、まず一般解を求め、次にパラメータを調節することによって付帯条件に合わせる戦略で解こう。

この漸化式の一般解を二つの漸化式

$$a_{n+1} = 2a_n + 3$$

と

$$a_{n+1} = 2a_n$$

の解を重ね合わせることによって構成する。

上の漸化式は問題の漸化式と同じだから、何を求めたらいいのかわかりにくいが、ここでは付帯条件に関係なく特殊解をひとつ求めればよいというのが要点である。この漸化式には特殊解が無数にあるから、その中から書きやすい特殊解を選べばよい。極端なことをいえば、この部分はカンニングなどで誰かに教えてもらったとしても、漸化式に代入して満たすことを確かめさえすれば(倫理的にはどうか知らないが)数学的には問題ない。

特殊解を求める戦略としては、非斉次項の形をまねるという方法がよく用いられる。今回の非斉次項は定数だから、特殊解も定数であるとしよう。

$s_n = p$ とおいて漸化式に代入すると（$s_{n+1} = p$ に注意して）$p = 2p + 3$ となり、一次方程式を解いて $p = -3$ を得る。この一次方程式は問題集などに特性方程式と記されているが、特性方程式という用語は別の意味ですでに用いられているので適切ではない。漸化式の定数の解を***<u>不動点</u>***といい、不動点を求める方程式を、***<u>不動点方程式</u>***という。この一次方程式は不動点方程式である。

さて、不動点方程式の解−3 を用いて特殊解$s_n = -3$を得る。

2 番目の漸化式は線形斉次漸化式だからすでに一般解の求め方を知っている。そこでその一般解を$g_n = \alpha \cdot 2^{n-1}$と置く。一般解である証拠に、パラメータ α が解に含まれている。

この二つの解の和$a_n = s_n + g_n$を作ると、重ね合わせの原理によって漸化式$a_{n+1} = 2a_n + 3$の解である。ここで解g_nは非斉次項＝0 の漸化式の解だから、重ね合わせた漸化式の非斉次項が 3 のみであることに注意しよう。さらにa_nは

$$a_n = s_n + g_n = -3 + \alpha \cdot 2^{n-1}$$

と、パラメータ α を含んでいるので一般解である。

付帯条件を満たす特殊解は、一般解を付帯条件に代入して$a_1 = -3 + \alpha = 2$という一次方程式を解くことによりパラメータを$\alpha = 5$と定める。

求める特殊解は$a_n = -3 + 5 \cdot 2^{n-1}$である。

もうひとつ例題を用いて解法を確認しよう。

例題 7

$$2a_{n+1} + 3a_n + 5 = 0,\ \ a_1 = 4$$

(1)非斉次漸化式$2a_{n+1} + 3a_n + 5 = 0$の特殊解s_nを求める。

この例では、不動点方程式$2p + 3p + 5 = 0$を解いて$s_n = p = -1$。

(2)斉次漸化式$2a_{n+1} + 3a_n = 0,\ \ a_{n+1} = -\dfrac{3}{2}a_n$の一般解$g_n$を求める。

この例では等比数列の特殊解を用いて$g_n = \alpha \cdot \left(-\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$。

(3)重ね合わせの原理を用いて非斉次漸化式の一般解a_nを求める。

この例では$a_n = s_n + g_n = -1 + \alpha \cdot \left(-\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$

(4)付帯条件を満たすようにパラメータを調節する。

この例では$a_1 = -1 + \alpha = 4$、$\alpha = 5,\ a_n = -1 + 5 \cdot \left(-\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$

3 項間漸化式でも、同様の手法で非斉次線形漸化式を解くことができる。

例題 8

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 8,\ a_1 = 2,\ a_2 = 5$$

(1)非斉次漸化式$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 8$の特殊解$s_n$は、不動点方程式$p - 5p + 6p = 8$の解$p = 4$を用いて$s_n = 4$。

(2)斉次漸化式 $a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$ の一般解 g_n は、特性方程式 $r^2-5r+6=0$ の解 $r=2,3$ を用いて $g_n=\alpha\cdot 2^{n-1}+\beta\cdot 3^{n-1}$。

(3)重ね合わせの原理を用いて、非斉次漸化式の一般解 a_n は $a_n=s_n+g_n=4+\alpha\cdot 2^{n-1}+\beta\cdot 3^{n-1}$。

(4)付帯条件に合わせてパラメータを調節する。$a_1=4+\alpha+\beta=2$，$a_2=4+2\alpha+3\beta=5$。連立方程式を解いて $\alpha=-7,\ \beta=5$。$a_n=4-7\cdot 2^{n-1}+5\cdot 3^{n-1}$

練習 12　次の漸化式を解け

(1) $a_{n+1}+3a_n=12,\ a_1=5$

(2) $a_{n+2}+a_{n+1}-6a_n=4,\ a_1=1,\ a_2=1$

(3) $a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=3,\ a_1=0,\ a_2=1$

$\boxed{10}$　非斉次線形漸化式の解法（２）

非斉次項が定数の場合は不動点方程式を解いて特殊解を求めることができた。非斉次項が n の式になっている場合に特殊解を求める一般的な方法は§６で紹介する。しかし、目次を見れば分かるように、それはかなり大掛かりな方法である。一般的な方法によらずに特殊解が求まる場合の多くは、特殊解と非斉次項の形が似ている。そこで、***<u>非斉次項のまね</u>***をして特殊解を求めるという戦略を用いよう。この戦略は、特殊解を見出す手間を大幅に減らすが、必ずうまく行くという保証はない。

例題 9

$$a_{n+1}=2a_n-(n-1),\quad a_1=4$$

(1)非斉次漸化式 $a_{n+1}=2a_n-(n-1)$ の特殊解 s_n は非斉次項（n の１次式）のまねをして $s_n=pn+q$ と置こう。漸化式に代入すると

$$p(n+1)+q=2(pn+q)-(n-1)$$

両辺を整理して

$$pn+p+q=(2p-1)n+2q+1。$$

この等式がすべての n について成立する、つまり恒等式であることを用いると $p=2p-1,\ p+q=2q+1$。連立方程式を解いて $p=1,\ q=0$。$s_n=n$

(2)斉次漸化式の一般解は $g_n=\alpha\cdot 2^{n-1}$

(3)重ね合わせの原理より、非斉次漸化式の一般解は $a_n=n+\alpha\cdot 2^{n-1}$

(4)付帯条件に合わせてパラメータを調整して $a_n=n+3\cdot 2^{n-1}$

練習 13　次の漸化式を解け

(1) $a_{n+1}=3a_n+2n,\ a_1=2$

(2) $a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=4n,\ a_1=a_2=0$

(3) $a_{n+1}=2a_n+n^2,\ a_1=1$

例題 10

$$a_{n+1}=2a_n+3^{n-1},\ a_1=2$$

非斉次項が等比数列になっている場合である。

(1)非斉次漸化式の特殊解は、非斉次項のまねをして $s_n=p\cdot 3^{n-1}$ と置く。漸化式に代入して

$$p\cdot 3^n=2p\cdot 3^{n-1}+3^{n-1}$$

両辺を 3^{n-1} で割って $3p=2p+1$。一次方程式を解いて $p=1$。つまり $s_n=3^{n-1}$

(2)斉次漸化式の一般解は $g_n=\alpha\cdot 2^{n-1}$ である。

(3)非斉次漸化式の一般解は $a_n=3^{n-1}+\alpha\cdot 2^{n-1}$

(4)付帯条件に合わせて、特殊解は $a_n=3^{n-1}+2^{n-1}$

練習 14　次の漸化式を解け

(1) $a_{n+1}=3a_n+2^{n-1}, a_1=3$

(2) $a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=3^{n-1},\ a_1=3,\ a_2=6$

例題 11

$$a_{n+1}=2a_n+8\cdot 3^{n-1}-(n-1),\ a_1=3$$

この漸化式の非斉次項が例題 9 の非斉次項と例題 10 の非斉次項を重ね合わせてできることに注目しよう。$\boxed{8}$で調べた重ね合わせの原理を用いると、例題 9,10 の特殊解から、この漸化式の特殊解を構成することができる。

(1)例題 11 の漸化式の非斉次項は、例題 9 の非斉次項に例題 10 の非斉次項の 8 倍を加えたものだから$\boxed{8}$で証明した定理より、例題 11 の漸化式の特殊解は、例題 9 の特殊解に例題 10 の特殊解の 8 倍を加えて作ることができる。つまり

$$s_n=n+8\cdot 3^{n-1}$$

(2)斉次漸化式の一般解は $g_n=\alpha\cdot 2^{n-1}$

(3)非斉次漸化式の一般解は $a_n=\alpha\cdot 2^{n-1}+n+8\cdot 3^{n-1}$

(4)付帯条件に合わせて、特殊解は $a_n=-6\cdot 2^{n-1}+n+8\cdot 3^{n-1}$

この節で取り上げた解法の最初の部分(1)は、まるで漸化式そのものを解くようにも思えるので、なぜそれが解きやすい解法なのかわかりにくいかもしれない。しかしわれわれは漸化式と付帯条件を分離して考えているので、特殊解を求める際に付帯条件を考慮に入れる必要がない。無数にある一般解の中から表しやすいものを任意に選べるのである。この事実と、先人の経験から、発見的手法で特殊解を求められる漸化式の例が多数ある。それでもだめな場合は§6 の一般的方法が最終兵器となる。

練習 15　次の漸化式を解け

(1) $a_{n+1}=2a_n+n\cdot 3^{n-1},\ a_1=1$(特殊解は $a_n=(pn+q)\cdot 3^{n-1}$ と置いて求める)

(2) $a_{n+1}=2a_n+\sin\dfrac{n\pi}{2},\ a_1=1$(特殊解は $a_n=p\sin\dfrac{n\pi}{2}+q\cos\dfrac{n\pi}{2}$ と置いて求める)

11　線形非斉次漸化式の解法（3）

特性根が重なる場合は、ここでも悪さをする。

例題 12

$$a_{n+1}=2a_n+2^{n-1},\ a_1=2$$

漸化式の特性根と非斉次項の公比が一致している場合である。まず、前節の例と同じ解法を試みよう。

(1)非斉次項の形をまねて、特殊解を $s_n=p\cdot 2^{n-1}$ と置く。漸化式に代入すると

$p\cdot 2^n=2p\cdot 2^{n-1}+2^{n-1}$。

移項して整理すると・・・(T_T)。ありえない式がでてくる。これは最初に特殊解を $s_n=p\cdot 2^{n-1}$ と置くことが誤っていたということだ。つまり、この形の特殊解は存在しない。

早速行き詰ってしまったので、新たな手を考案する必要に迫られた。緊急事態が生じたときにまず思い出すべき手法は定数変化法である。

定数変化法は線形漸化式の斉次部分の一般解のパラメータを未知の数列と置き換えるという手法である。例題 12 の漸化式の斉次部分は $a_{n+1}=2a_n$ で、その一般解は $a_n=\alpha\cdot 2^{n-1}$ であるから、パラメータ α を数列 p_n に置き換えて $s_n=p_n\cdot 2^{n-1}$ と置く（現在は非斉次漸化式の特殊解を求めようとしていることを思い出そう）。例題 12 の漸化式に代入して

$$p_{n+1}\cdot 2^n=2p_n\cdot 2^{n-1}+2^{n-1}$$

両辺を 2^n で割って $p_{n+1}=p_n+\dfrac{1}{2}$。これは公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列であるから $p_n=\dfrac{1}{2}n+\alpha$ と置ける。ここでは特殊解を 1 つ求めればいいのだから $\alpha=0$ として $p_n=\dfrac{1}{2}n$、もとに戻して $s_n=p_n\cdot 2^{n-1}=n\cdot 2^{n-2}$

(2)斉次漸化式の一般解は $g_n=\alpha\cdot 2^{n-1}$。

(3)非斉次漸化式の一般解は $a_n=s_n+g_n=n\cdot 2^{n-2}+\alpha\cdot 2^{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}n+\alpha\right)\cdot 2^{n-1}$。ここで振り返ってみると公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列 p_n を一般形 $p_n=\dfrac{1}{2}n+\alpha$ と書き表しておけば、一度に一般解を書き下せたことがわかる。

(4)付帯条件に合わせてパラメータを調節して $a_n=\left(\dfrac{1}{2}n+\dfrac{3}{2}\right)\cdot 2^{n-1}$

この例題で現れた特殊解の形、等比数列の前に n がついた形は、特性根が重解のときに出合った記憶がある。この二つのタイプの例題には実は関係がある。

例題 4 の漸化式を再び見てみよう。

$$a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$$

この漸化式は $a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$ と変形できる。この式は「数列 $b_n=a_{n+1}-2a_n$ の 2 項間漸化式

$b_{n+1}=2b_n$」と解釈できるから、この漸化式の一般解$\beta\cdot 2^{n-1}$を用いて

$$b_n=a_{n+1}-2a_n=\beta\cdot 2^{n-1}$$

と表すことができる。つまり例題 4 の漸化式(3 項間斉次線形漸化式)は、2 項間非斉次線形漸化式

$$a_{n+1}=2a_n+\beta\cdot 2^{n-1}$$

に書き換えることができた。これは例題12と同じタイプ(特性根と非斉次項の等比数列の公比が一致する場合)である。上の結果から、その一般解は非斉次漸化式の特殊解をβ倍して修正した

$$a_n=\beta n\cdot 2^{n-2}+\alpha\cdot 2^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\beta n+\alpha\right)\cdot 2^{n-1}$$

このことから、特性根と非斉次項の公比が一致する問題は、特性根が重解である場合と同様の処方箋で解決が可能であることが予想できる。

この悪さについてまとめてみよう

線形漸化式の非斉次項が等比数列のとき、特性根のひとつと非斉次項の公比が一致すると悪さが起きる。悪さは、特殊解を非斉次項と同じ公比の等比数列と置くと矛盾が起きてしまうという形で発生する。対策は次のようにする。

一致した特性根rが重解でない場合、特殊解を$s_n=pnr^{n-1}$と置けば解決する。

一致した特性根rがl重解である場合、特殊解を$s_n=pn^l r^{n-1}$と置けば解決する。

例題 13

$$a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=2^{n-1},\ a_1=a_2=1$$

(1)斉次漸化式の特性方程式は$r^2-4r+4=0$であるから、特性根$r=2$は 2 重解である。

(2)特殊解は$s_n=\alpha n^2\cdot 2^{n-1}$と置いて、漸化式に代入することによって求める。代入すると

$$\alpha(n+2)^2\cdot 2^{n+1}-4\alpha(n+1)^2\cdot 2^n+4\alpha n^2\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$$

両辺を2^{n-1}で割って

$$\alpha\left\{4(n+2)^2-8(n+1)^2+4n^2\right\}=1,\quad 8\alpha=1,\ \alpha=\frac{1}{8}。$$

特殊解は$s_n=\frac{1}{8}n^2\cdot 2^{n-1}$

(3)斉次漸化式の一般解は$g_n=(\alpha+\beta n)\cdot 2^{n-1}$である。

(4)この漸化式の一般解は$a_n=s_n+g_n=\left(\alpha+\beta n+\frac{1}{8}n^2\right)\cdot 2^{n-1}$

(5)付帯条件に合わせてパラメータを調節する。

$$a_1=\left(\alpha+\beta+\frac{1}{8}\right)=1,\ \alpha+\beta=\frac{7}{8}$$

$$a_2=2\left(\alpha+2\beta+\frac{1}{2}\right)=1,\alpha+2\beta=0$$

連立方程式を解いて$\alpha=\frac{7}{4},\ \beta=-\frac{7}{8}$

$$a_n=\left(\frac{7}{4}-\frac{7}{8}n+\frac{1}{8}n^2\right)\cdot 2^{n-1}=\frac{1}{8}\left(n^2-7n+14\right)\cdot 2^{n-1}$$

練習 16　次の漸化式を解け

(1) $a_{n+1}=3a_n+3^n,\ a_1=1$

(2) $a_{n+1}=2a_n+n\cdot 2^{n-1},\ a_1=1$

(3) $a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=2^{n-1},\ a_1=1,\ a_2=4$

§5. 数列を係数とする線形漸化式

$\boxed{12}$　数列を係数とする線形斉次漸化式

重ね合わせの原理は線形漸化式の係数が定数でなく n に依存する数列であっても同様に成り立つ。

定理　2 項間斉次線形漸化式の場合

漸化式 $f_n a_{n+1}=g_n a_n$ (a_n は未知の数列、 $f_n,\ g_n$ は既知の数列)の常にゼロではないひとつの解(特殊解)を一般項が s_n の数列とすると、この漸化式の一般解は $a_n=\alpha s_n$ (α はパラメータ)である。

証明：仮定より $f_n s_{n+1}=g_n s_n$ であるから $a_n=\alpha s_n$ と置いて漸化式に代入すると

$$f_n a_{n+1}=f_n\alpha s_n=\alpha f_n s_n=\alpha g_n s_n=g_n a_n$$

実際 f_n が決してゼロにならない場合は $a_{n+1}=\dfrac{g_n}{f_n}a_n$ であるから、項の番号をひとつずらして

$$a_n=\frac{g_{n-1}}{f_{n-1}}a_{n-1}=\frac{g_{n-1}}{f_{n-1}}\cdot\frac{g_{n-2}}{f_{n-2}}a_{n-2}=\frac{g_{n-1}}{f_{n-1}}\cdot\frac{g_{n-2}}{f_{n-2}}\cdot\frac{g_{n-3}}{f_{n-3}}a_{n-3}=\cdots$$

と変形できるから特殊解は $s_n=\dfrac{g_{n-1}}{f_{n-1}}\cdot\dfrac{g_{n-2}}{f_{n-2}}\cdot\dfrac{g_{n-3}}{f_{n-3}}\cdots\cdots\dfrac{g_1}{f_1}=\prod_{k=1}^{n-1}\dfrac{g_k}{f_k}$ と表せ、それを用いて一般解は

$$a_n=\alpha s_n=\alpha\frac{g_{n-1}}{f_{n-1}}\cdot\frac{g_{n-2}}{f_{n-2}}\cdot\frac{g_{n-3}}{f_{n-3}}\cdots\cdots\frac{g_1}{f_1}=\alpha\prod_{k=1}^{n-1}\frac{g_k}{f_k}$$

ただしここで記号 $\prod_{k=1}^{n}a_k$ は $a_1,a_2,\cdots,a_n$ をすべて掛け合わせたものを表す。

例題 14

$na_{n+1}=(n+1)a_n,\ a_1=3$

(1) $a_n=n$ と置いて漸化式に代入すると成り立つことから $s_n=n$ は特殊解である。

(2)重ね合わせの原理より $a_n=\alpha n$ は α をパラメータとする一般解である。

(3)付帯条件に合わせてパラメータを調節して $a_n=3n$ 。

(1)は余りにも天下りがひどいと思う向きは、特殊解を上記の方法で $s_n=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{k+1}{k}=n$ と求めても良い。

練習 17　次の漸化式を解け

(1) $(n+1)a_{n+1}=na_n,\ a_1=4$

(2) $a_{n+1}=na_n,\ a_1=1$

(3) $a_{n+1}=2^n a_n,\ a_1=1$

3 項間漸化式にも同様の重ね合わせの原理が成り立つ。

定理　　3 項間斉次線形漸化式の場合

漸化式 $f_n a_{n+2}+g_n a_{n+1}+h_n a_n=0$（$a_n$ は未知の数列、$f_n,\ g_n,\ h_n$ は既知の数列)の常にゼロではない異なる二つの解(特殊解)を一般項が $s_n,\ t_n$ の数列とすると、この漸化式の一般解は $a_n=\alpha s_n+\beta t_n$（α、β はパラメータ)である。

練習 18　定理を証明せよ。

例題 15

$(n-1)a_{n+2}-(3n-2)a_{n+1}+2na_n=0,\ a_1=2,\ a_2=4\cdots⑭$

(1) $a_n=r^{n-1}$ と置いて漸化式⑭に代入すると $(n-1)r^{n+1}-(3n-2)r^n+2nr^{n-1}=0$ 。両辺を r^{n-1} で割って

$(n-1)r^2-(3n-2)r+2n=n(r^2-3r+2)-(r^2-2r)=(r-2)\{(r-1)n-r\}=0$

$r=2$ のとき、漸化式⑭を満たすから、$s_n=2^{n-1}$ は特殊解である。

次に $a_n=pn+q$ と置いて漸化式⑭に代入すると

$(n-1)\{p(n+2)+q\}-(3n-2)\{p(n+1)+q\}+2n(pn+q)=0$

左辺を展開して整理すると $q=0$ となるから、$t_n=n$ は特殊解である。

2 つの特殊解を求めるこの手法はひどく行き当たりばったりに見える。実際、行き当たりばったりである。しかし、重ね合わせの原理は、どんなひどい方法であっても、特殊解を 2 つ見つけさえすれば、3 項間斉次線形漸化式の一般解を構成する方法を保証しているので、その点をまったく気にする必要はない。極端な話をすれば、$s_n,\ t_n$ の結果を直接どこからともなく与えて、漸化式を満たすことを代入によって示すだけでよい。

しかしながら、この部分は当然解法の中での弱点部分でもある。漸化式の 2 つの特殊解を見出す一般的な方法は存在しないからである。この点は 2 項間漸化式とは事情が異なる。

(2)求まった 2 つの特殊解 $s_n=2^{n-1},\ t_n=n$ を重ね合わせて、漸化式⑭の一般解 $a_n=\alpha\cdot 2^{n-1}+\beta n$ を構成することができる。

(3)付帯条件に合わせてパラメータを調節する。$a_1=\alpha+\beta=2,\ a_2=2\alpha+2\beta=4$。ところが、この 2 つの条件は同一なので α、β を一組の値に特定することができない。この現象は、係数が n に依存する線形漸化式特有のものである。

今一度最初の漸化式⑭を見てほしい。係数がnに依存するため、係数がゼロになることがある。実際$n=1$を代入すると

$$(1-1)a_3-(3-2)a_2+2a_1=0,\ -a_2+2a_1=0$$

となるので、実は$a_1,\ a_2$だけの関係になってしまうので、$a_1,\ a_2$を自由に指定する付帯条件は不可能で、更に、$a_1,\ a_2$からa_3を決定することも不可能なのであった。

この例ではたまたま$a_1,\ a_2$が$n=1$の場合の特異的な漸化式を満たすように定められていたので、解は存在するが、a_3は自由に定められることになった。

$a_3=\gamma$とすると、$a_1=2$より、$\beta=2-\alpha$であるから$a_3=4\alpha+3\beta=6+\alpha=\gamma,\ \alpha=\gamma-6$。この問題の解は

$$a_n=(\gamma-6)\cdot 2^{n-1}+(8-\gamma)n$$ （γは任意の定数）

練習 19　次の漸化式を解け。

$$(2n-1)a_{n+2}-2(4n-1)a_{n+1}+3(2n+1)a_n=0,\ \ a_1=2,\ a_2=5$$

答：$a_n=3^{n-1}+n$

$\boxed{13}$　数列を係数とする線形非斉次漸化式

線形非斉次漸化式で係数が定数でない場合でも、係数が定数の場合と同様な解法が成立する。どんな方法でもいいから特殊解をひとつ求め、非斉次項を取り除いた斉次漸化式の一般解と重ねあわせれば、一般解が求まる。

定理

p,qを定数、$f_n,\ g_n,\ r_n$を既知の数列（たいていは一般項がすでにnの式で表されている）とする。

線形漸化式$a_{n+1}=r_na_n+f_n$の特殊解のひとつの一般項をb_n、$a_{n+1}=r_na_n+g_n$の特殊解のひとつの一般項をc_nと置くとき

$$d_n=pb_n+qc_n$$

で一般項が定義される数列は、漸化式$a_{n+1}=r_na_n+pf_n+qg_n$の特殊解のひとつである。

例題 16

$$na_{n+1}=(n+1)a_n+1,\ \ a_1=3\cdots⑮$$

(1) $a_n=p$(定数)と置いて、漸化式に代入すると$np=(n+1)p+1,\ \ p=-1$であるから、特殊解は$s_n=-1$。

(2)例題 14 より、斉次漸化式$na_{n+1}=(n+1)a_n$の一般解は$g_n=\alpha n$。

(3)上記の定理(重ね合わせの原理)より例題 16 の漸化式の一般解は

$$a_n=s_n+g_n=-1+\alpha n$$

(4)付帯条件に合わせてパラメータを調節すると$a_1=3=-1+\alpha,\ \ \alpha=4$。$a_n=-1+4n$

例題 17

$$na_{n+1}=(n+1)a_n+5+3n(n+1),\ \ a_1=3$$

(1)まず漸化式 $na_{n+1}=(n+1)a_n+n(n+1)\cdots$⑯を考える。もちろん、この漸化式も線形非斉次漸化式だから今までの方法を用いてとくことができるはずだ。しかし、ここでは両辺を $n(n+1)$ で割ってみると

$$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+1$$

$b_n=\dfrac{a_n}{n}$ と置くと、b_n は漸化式 $b_{n+1}=b_n+1$ を満たすから、特殊解として $b_n=n$ を持つ。もとに戻して特殊解は $t_n=nb_n=n^2$。

(2)例題 17 の漸化式の非斉次項は、漸化式⑮の非斉次項の 5 倍と、漸化式⑯の非斉次項の 3 倍を加えたものであるから、特殊解は⑮の特殊解 $s_n=-1$ の 5 倍と、⑯の特殊解 $t_n=n^2$ の 3 倍を加えた $u_n=5s_n+3t_n=-5+3n^2$ である。

(3)斉次漸化式の一般解 $g_n=\alpha n$ を用いて、一般解 $a_n=-5+3n^2+\alpha n$ を得る。

(4) $a_1=-5+3+\alpha=3,\ \alpha=5$。答：$a_n=-5+3n^2+5n=3n^2+5n-5$

例題 18

$$(2n-1)a_{n+2}-2(4n-1)a_{n+1}+3(2n+1)a_n=8,\ \ a_1=2,\ a_2=5$$

(1) $a_n=p$ と置いて、漸化式に代入すると $(2n-1)p-2(4n-1)p+3(2n+1)p=8,\ \ 4p=8,\ \ p=2$ であるから、特殊解は $s_n=2$。

(2)練習 19 の解答を用いると、右辺をゼロと置いた斉次漸化式の一般解は $a_n=\alpha 3^{n-1}+\beta n$

(3)この漸化式の一般解は $a_n=2+\alpha 3^{n-1}+\beta n$

(4)付帯条件より $a_1=2=2+\alpha+\beta,\ a_2=5=2+3\alpha+2\beta$ であるから $\alpha+\beta=0,\ 3\alpha+2\beta=3$。$\alpha=3,\ \beta=-3$。答：$a_n=2+3^n-3n$

§6. グリーン数列とその利用

$\boxed{14}$　　基本数列

数列の項のうち、ひとつだけが 1 で、そのほかの項がすべてゼロであるものを***<u>基本数列</u>***という。たとえば初項だけが 1 でそのほかがゼロの数列

1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, …

は基本数列である。この数列の第 n 項を $e_n^{(1)}$ と表そう。

$$e_1^{(1)}=1,\quad e_2^{(1)}=0,\quad e_3^{(1)}=0\cdots$$

である。同様に第 3 項だけ 1 でそのほかの項がゼロの数列

0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, …

も基本数列で、この数列の第 n 項は $e_n^{(3)}$ と表す。

$$e_1^{(3)}=0,e_2^{(3)}=0,e_3^{(3)}=1,e_4^{(3)}=0\cdots$$

同様に$e_n^{(m)}$は第m項だけが１でそのほかの項はすべてゼロの基本数列の第n項を表す。

19 世紀のドイツの数学者クロネッカーにちなんだ記号、クロネッカーのデルタ

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1\ (i=j)\\0\ (i\neq j)\end{cases}$$

を用いると$e_n^{(m)}=\delta_{mn}$と表せる。

初項が４、そのほかの項がゼロの数列の第n項a_nは$a_n=4e_n^{(1)}$と表せる。また、初項が 4、第 2 項が 3、そのほかの項がゼロの数列

4，3，0，0，0，・・・

はの第n項は$a_n=4e_n^{(1)}+3e_n^{(2)}$と表せる。以下同様にして最初の 9 項が 1，２，３，４，５，６，７，８，９で、そのほかの項がすべてゼロの数列は第n項が

$$a_n=e_n^{(1)}+2e_n^{(2)}+3e_n^{(3)}+\cdots+9e_n^{(9)}=\sum_{m=1}^{9}m\,e_n^{(m)}$$

と表せる。一般に最初のM項が$a_1,a_2,\cdots,a_M$でそのほかの項はゼロの数列の第n項は

$$a_n=a_1e_n^{(1)}+a_2e_n^{(2)}+a_3e_n^{(3)}+\cdots+a_Me_n^{(M)}=\sum_{m=1}^{M}a_me_n^{(m)}$$

と表せる。上の式においてゼロでない最後の項の番号Mはいくらでも大きな数にとることができるから、各項がわかっている限りどんな数列でも基本数列の重ね合わせ(一次結合)で表せることがわかる。

特に最後の項を定めない数列(無限に続く数列)でも、同じ形式で表すことにする。

$$a_n=a_1e_n^{(1)}+a_2e_n^{(2)}+a_3e_n^{(3)}+\cdots+a_me_n^{(m)}+\cdots=\sum_{m=1}^{\infty}a_me_n^{(m)}$$

という記号を用いる。記号∞は数列の終わりを定めないことを表す。

$\boxed{15}$　グリーン数列１

この数列は 19 世紀前半のイギリス人数学者 George Green が微分方程式について開発した手法を数列に応用したものである。

グリーン数列とは非斉次項が基本数列であるような線形漸化式のある付帯条件を満たす特殊解のセットのことである。

たとえば、斉次線形漸化式$a_{n+1}=2a_n$に非斉次項$e_n^{(m)}$を付け加えた漸化式$a_{n+1}=2a_n+e_n^{(m)}$の解$(m=1,2,\cdots)$のセット$G_n^{(m)}$は非斉次線形漸化式$a_{n+1}=2a_n+f_n$の***グリーン数列***であるという。グリーン数列は斉次方程式の一般解をうまく利用することによって比較的簡単に求めることができる。

例題 19

$$a_{n+1}=2a_n+e_n^{(8)},\quad a_1=1$$

$1\leqq n\leqq 7$のとき$e_n^{(8)}=0$である。したがってその範囲においての漸化式は$a_{n+1}=2a_n$とみなしてよい。これは

斉次線形漸化式であるので一般解 $g_n = \alpha \cdot 2^{n-1}$ が求まり、さらに付帯条件 $a_1 = 1$ に合わせてパラメータを調節すれば特殊解 $a_n = 2^{n-1}$ が求まる。この特殊解は $n = 7$ のときの漸化式で a_8 が求まるから、第 8 項まで正しい式である。

$9 \leqq n$ のとき $e_n^{(8)} = 0$ である。したがってその範囲においての漸化式は $a_{n+1} = 2a_n$ とみなしてよい。これは斉次線形漸化式であるので一般解 $g_n = \alpha \cdot 2^{n-1}$ が求まる。ただしこの範囲では付帯条件が直接使えないのでパラメータ α は決定できない。この形で解が求まるのは第 9 項以降である。まとめると

$$a_n = \begin{cases} 2^{n-1} & (1 \leqq n \leqq 8) \\ \alpha \cdot 2^{n-1} & (9 \leqq n) \end{cases}。$$

パラメータ α を求めるために $n = 8$ のときの漸化式を調べよう。$n = 8$ のときの漸化式は

$$a_{8+1} = 2a_8 + e_8^{(8)}$$

である。今求めた a_n と $e_8^{(8)} = 1$ を利用すると

$$\alpha \cdot 2^8 = 2 \cdot 2^7 + 1。$$

一次方程式を解いて $\alpha = 1 + \dfrac{1}{2^8}$

以上のことより、$9 \leqq n$ のとき $a_n = \left(1 + 2^{-8}\right) \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1} + 2^{n-9}$ であるから、求める解は

$$G_n^{(8)} = \begin{cases} 2^{n-1} & (1 \leqq n \leqq 8) \\ 2^{n-1} + 2^{n-9} & (9 \leqq n) \end{cases}$$

同じようにして 8 以外の m についても帰納的定義

$$a_{n+1} = 2a_n + e_n^{(m)}, \quad a_1 = 1$$

で定められるグリーン数列 $G_n^{(m)}$ を求めることができる。

$\underline{1 \leqq n \leqq m-1}$ <u>のとき</u>漸化式が $a_{n+1} = 2a_n$ であることを利用すれば、$1 \leqq n \leqq m$ のとき、数列の第 n 項は $a_n = 2^{n-1}$ である。次に $m+1 \leqq n$ のときも漸化式が $a_{n+1} = 2a_n$ であることを利用すれば $m+1 \leqq n$ のとき $a_n = \alpha \cdot 2^{n-1}$ と表せる。最後に $n = m$ のときの漸化式 $a_{m+1} = 2a_m + 1$ に代入して α を求めると $\alpha = 1 + 2^{-m}$ であるから、グリーン数列は

$$G_n^{(m)} = \begin{cases} 2^{n-1} & (1 \leqq n \leqq m) \\ 2^{n-1} + 2^{n-m-1} & (m+1 \leqq n) \end{cases} \cdots ⑰$$

練習 20　$m = 1$ のときは、本文中の下線部「$\underline{1 \leqq n \leqq m-1}$ <u>のとき</u>」が成立しないので、多少の注意が必要である。$m = 1$ の場合もグリーン数列⑰が正しいことを示せ。

$\boxed{16}$　　グリーン数列 2

3 項間漸化式でも、グリーン数列を考えることができる。

例題 20

$$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=e_n^{(m)},\ a_1=a_2=0$$

考えやすくするために、前の例題と同じように、まず $m=8$ の場合を考えよう。すなわち

$$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=e_n^{(8)},\ a_1=a_2=0$$

で定まる数列を求める。

$1\leqq n\leqq 7$ のとき $e_n^{(8)}=0$ である。したがってその範囲においての漸化式は $a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$ とみなしてよい。これは斉次線形漸化式であるので、特性方程式 $r^2-5r+6=0$ の解 $r=2, 3$ を用いて一般解 $g_n=\alpha\cdot 2^{n-1}+\beta\cdot 3^{n-1}$ が求まる。ところが今回の付帯条件 $a_1=a_2=0$ からはパラメータの値 $\alpha=\beta=0$ が定まるから、特殊解は $a_n=0$ (すべての項がゼロの数列)。この特殊解は $n=7$ のときの漸化式で a_9 が求まるから、第 9 項まで正しい式である。

$9\leqq n$ のとき $e_n^{(8)}=0$ である。したがってその範囲においての漸化式は $a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$ とみなしてよい。$1\leqq n\leqq 7$ のときと同様にして一般解 $a_n=\alpha\cdot 2^{n-1}+\beta\cdot 3^{n-1}$ が求まる。ただしこの範囲では付帯条件が直接使えないのでパラメータ α 、β は決定できない。この形で解が求まるのは第 9 項以降である。しかし、$1\leqq n\leqq 7$ の場合で初項から第 9 項まではすべてゼロと定まっているので $a_9=\alpha\cdot 2^8+\beta\cdot 3^8=0$。この条件を用いてパラメータの一方を消去すると $\beta=-\alpha\left(\frac{2}{3}\right)^8$。つまり $a_n=\alpha\cdot\left(2^{n-1}-2^8\cdot 3^{n-9}\right)$。まとめると

$$a_n=\begin{cases}0 & (1\leqq n\leqq 9)\\ \alpha\cdot\left(2^{n-1}-2^8\cdot 3^{n-9}\right) & (9\leqq n)\end{cases}$$ 。($n=9$ はどちらの式を用いても同じ)

最後にパラメータ α を求めるために $n=8$ のときの漸化式を調べよう。$n=8$ のときの漸化式は

$$a_{8+2}-5a_{8+1}+6a_8=e_8^{(8)}$$

である。今求めた a_n と $e_8^{(8)}=1$ を利用すると

$a_{10}-0+0=1$ である。$9\leqq n$ の場合の表し方を用いて $a_{10}=\alpha\cdot\left(2^{10-1}-2^8\cdot 3^{10-9}\right)=-2^8\alpha=1$。
一次方程式を解いて $\alpha=-2^{-8}$。

以上のことより、$9\leqq n$ のとき $a_n=-2^{-8}\cdot\left(2^{n-1}-2^8\cdot 3^{n-9}\right)=3^{n-9}-2^{n-9}$ であるから、求める解は

$$G_n^{(8)}=\begin{cases}0 & (1\leqq n\leqq 8)\\ 3^{n-9}-2^{n-9} & (9\leqq n)\end{cases}$$ 。

同様の方法で 8 以外の m についても帰納的定義

$$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=e_n^{(m)},\ a_1=a_2=0$$

で定められるグリーン数列 $G_n^{(m)}$ を求めることができる。

$1\leqq n\leqq m-1$ のとき漸化式が $a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$ であることを利用すれば、$1\leqq n\leqq m+1$ のとき、数列の第 n 項は $a_n=0$ である。次に $m+1\leqq n$ のときも漸化式が $a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0$ であることを利用すれば $m+1\leqq n$ のとき $a_n=\alpha\cdot 2^{n-1}+\beta\cdot 3^{n-1}$ と表せる。ただし、$1\leqq n\leqq m-1$ の場合で初項から第 $m+1$ 項まではすべてゼロと定まっているので $a_{m+1}=\alpha\cdot 2^m+\beta\cdot 3^m=0$。この条件を用いてパラメータの一方を消去すると $\beta=-\alpha\left(\frac{2}{3}\right)^m$。

つまり $a_n=\alpha\cdot\left(2^{n-1}-2^m\cdot 3^{n-m-1}\right)$。最後に $n=m$ のときの漸化式 $a_{m+2}-5a_{m+1}+6a_m=1$ に代入すると $a_{m+2}=1$ だから $a_{m+2}=\alpha\cdot\left(2^{m+1}-2^m\cdot 3\right)=-\alpha\cdot 2^m=1$、この条件から α を求めると $\alpha=-2^{-m}$ である。したがって、グリーン数列は

$$G_n^{(m)}=\begin{cases}0 & (1\leqq n\leqq m)\\ 3^{n-m-1}-2^{n-m-1} & (m+1\leqq n)\end{cases}\cdots⑱$$

練習 21　$m=1$ のときも⑱式が正しいことを示せ。

$\boxed{17}$　重ね合わせの原理（３）－付帯条件の重ね合わせ

グリーン数列を用いて、線形非斉次漸化式の解を求める方法を開発しよう。まず手始めに 2 つの項だけがゼロでない数列を非斉次項とする漸化式を解こう。いずれは更にたくさんの項がゼロでない一般の数列を非斉次項とする漸化式を解くことを目指そう。

例題 21

数列 0，0，0，1，0，0，5，0，0，…という数列の第 n 項を f_n であらわすとき

$a_{n+1}=2a_n+f_n$，　$a_1=1$

で定められる数列を求めよ

数列 f_n は基本数列を $f_n=e_n^{(4)}+5e_n^{(7)}$ と重ね合わせて作ることができる。$\boxed{8}$ において、非斉次項が 2 つ以上の数列の重ね合わせで表せるときの特殊解の求め方を調べた。一言で言えば非斉次項の重ねあわせと同じ重ねあわせを、特殊解に行えばよい。

この例では、非斉次項が $e_n^{(4)}$, $e_n^{(7)}$ のときの特殊解は、それぞれグリーン数列 $G_n^{(4)}$, $G_n^{(7)}$ であるから、求める特殊解はその重ね合わせ

$s_n=G_n^{(4)}+5G_n^{(7)}$

で作ることができる。具体的に書けば

$$s_n=\begin{cases}6\cdot 2^{n-1} & (n\leqq 4)\\ 6\cdot 2^{n-1}+2^{n-5} & (5\leqq n\leqq 7)\\ 6\cdot 2^{n-1}+2^{n-5}+5\cdot 2^{n-8} & (8\leqq n)\end{cases}$$

となる。

この特殊解に斉次漸化式 $a_{n+1}=2a_n$ の一般解 $g_n=\alpha\cdot 2^{n-1}$ を加えると、非斉次漸化式の一般解が得られる。

$a_n=\alpha\cdot 2^{n-1}+s_n$

$s_1=6$ に注意すると $a_1=\alpha+s_1=\alpha+6=1$ より、$\alpha=-5$。これに s_n の具体的な形を代入して、求める数列を具体的な形で表すと

$$a_n=\begin{cases}2^{n-1} & (n\leqq 4)\\ 2^{n-1}+2^{n-5} & (5\leqq n\leqq 7)\\ 2^{n-1}+2^{n-5}+5\cdot 2^{n-8} & (8\leqq n)\end{cases}$$

グリーン数列$G_n^{(m)}$はすべて付帯条件$a_1=1$を満たすので$G_1^{(m)}=1$であるが、それを重ね合わせて作った特殊解s_nの満たす付帯条件は$a_1=6$である。付帯条件の値も、非斉次項の重ねあわせと同様に重ね合わせられていることがわかる。ここでは非斉次項を基本数列で表したときの係数の和が、グリーン関数の満たす付帯条件の値にかかっている。

同様に、漸化式の非斉次項f_nがたくさんの基本数列の和として

$$f_n=f_1e_n^{(1)}+f_2e_n^{(2)}+\cdots+f_M e_n^{(M)}=\sum_{m=1}^{M}f_m e_n^{(m)}$$

と表せるとき（つまりこの数列は初項から$f_1, f_2, \cdots, f_M$で、第$M+1$項から先はすべてゼロということ)、グリーン数列を用いて求まる特殊解s_nは

$$s_n=f_1G_n^{(1)}+f_2G_n^{(2)}+\cdots+f_M G_n^{(M)}=\sum_{m=1}^{M}f_m G_n^{(m)}$$

で表せる。ここで非斉次項を基本数列の重ねあわせで表したもので、基本数列の代わりにグリーン数列を代入すると、特殊解を表していることに注目しよう。この特殊解の満たす付帯条件は

$$a_1=s_1=f_1G_1^{(1)}+f_2G_1^{(2)}+\cdots+f_M G_1^{(M)}=\sum_{m=1}^{M}f_m G_1^{(m)}=\sum_{m=1}^{M}f_m$$

である。つまり、非斉次項となる数列の和が付帯条件の値となる。

$\boxed{18}$ 線形な付帯条件

今後、いろいろな数列を非斉次項として特殊解を計算しようとするときに、この付帯条件は思わぬ障害を引き起こす。漸化式は初項から順番に項を決めていく規則なのに、特殊解(の初項)が満たすべき付帯条件を決定するのに、非斉次項となる数列のすべての項を知らなくてはならない。たとえば数列の最初の 50 項だけ知れば十分だという場合でも、数列f_nの最後のゼロでない項が第 1000 項であれば、1000 個のグリーン数列$G_n^{(1)}$から$G_n^{(1000)}$までを重ね合わせなければならない。非斉次項の数列で、ゼロでない項が無限にある場合には原理的な困難を引き起こす。たとえば、非斉次項が定数である簡単な場合$f_n=1$でも特殊解は無限のグリーン数列の和

$$s_n=f_1G_n^{(1)}+f_2G_n^{(2)}+\cdots+f_M G_n^{(M)}+\cdots=G_n^{(1)}+G_n^{(2)}+\cdots+G_n^{(M)}+\cdots$$

を考える破目になり、特に付帯条件を定める初項は

$$G_1^{(1)}+G_1^{(2)}+\cdots+G_1^{(M)}+\cdots=1+1+\cdots+1+\cdots$$

となるので、有限の値にならない。(数列の和が発散する)

その点、例題 20 のグリーン数列は優れている。この例題では付帯条件が$a_1=0$なので、グリーン数列の初項もすべてゼロとなる。すなわち$G_1^{(m)}=0$。非斉次項の数列f_nを用いてグリーン数列を重ね合わせて特殊解

$$s_n=f_1G_n^{(1)}+f_2G_n^{(2)}+\cdots+f_M G_n^{(M)}+\cdots$$

を作っても$G_1^{(m)}=0$であるから

$$s_n=0+0+\cdots+0+\cdots=0$$

となり、一つ一つのグリーン数列とまったく同じ付帯条件を満たす。このように、重ね合わせを行ってもまっ

たく変化しない付帯条件を、***<u>線形な付帯条件</u>***という。

練習 22　次の付帯条件のうち、線形なものはどれか。

(1) $a_1 = 3$　　(2) $a_2 = 0$　　(3) $a_1 = a_2$　　(4) $a_1 + a_2 = 1$

(5) $a_1 = \dfrac{1}{a_2}$　　(6) $a_1 = 2a_2 = 3a_3$

グリーン数列は、あとで非斉次項の数列 f_n を用いて(時には無限の回数)重ね合わせなくてはならないので、線形な付帯条件を満たすのが望ましい。

例題 19 のグリーン数列を付帯条件が線形になるように書き直そう。

例題 22

$$a_{n+1} = 2a_n + e_n^{(m)},\quad a_1 = 0$$

例題 20 と同じように数列の最初のほうの項はゼロである。

$1 \leqq n \leqq m-1$ のとき、グリーン数列は漸化式と付帯条件 $a_{n+1} = 2a_n,\ a_1 = 0$ を満たすから

$$G_n^{(m)} = 0\ (1 \leqq n \leqq m)$$

$m+1 \leqq n$ のとき、グリーン数列は漸化式 $a_{n+1} = 2a_n$ を満たすから

$$G_n^{(m)} = \alpha \cdot 2^{n-1}\ (m+1 \leqq n)$$

特に $G_m^{(m)} = 0$ 、$G_{m+1}^{(m)} = \alpha \cdot 2^m$ である。

$n = m$ のとき、グリーン数列の満たす漸化式は $a_{m+1} = 2a_m + 1$ であるから $G_{m+1}^{(m)} = \alpha \cdot 2^m = 1$。これより $\alpha = 2^{-m}$。

まとめると

$$G_n^{(m)} = \begin{cases} 0 & (1 \leqq n \leqq m) \\ 2^{n-m-1} & (m+1 \leqq n) \end{cases} \cdots ⑲$$

19　グリーン数列の利用

非斉次項がある漸化式の解を、グリーン数列を利用して求めよう。まず、グリーン数列の一番の特徴は、どんな非斉次項があっても、特殊解を決まった形で書き表せることである。ただし、その形には、数列の和が含まれるので、具体的な非斉次項を与えた場合、和の計算が困難になることがある。

例題 23

$$a_{n+1} = 2a_n + f_n,\ a_1 = 0$$

数列 f_n は基本数列の重ね合わせとして

$$f_n = f_1 e_n^{(1)} + f_2 e_n^{(2)} + f_3 e_n^{(3)} + \cdots + f_m e_n^{(m)} + \cdots = \sum_{m=1}^{\infty} f_m e_n^{(m)}$$

と表すことができるので、$\boxed{17}$ で見たように、基本数列の代わりにグリーン数列を代入すると特殊解を作ることができる。ここでは付帯条件 $a_1 = 0$ は線形な付帯条件なので、重ね合わせた特殊解も自動的に同じ付帯条件を満たす。したがって求める解は

$$a_n = s_n = f_1 G_n^{(1)} + f_2 G_n^{(2)} + f_3 G_n^{(3)} + \cdots + f_m G_n^{(m)} + \cdots = \sum_{m=1}^{\infty} f_m G_n^{(m)} \cdots ⑳$$

と表せる。形式的ではあるが、問題はもうこれで解けてしまった。

ただし、気になることがいくつかある。まず⑳式はどこまでも続く足し算を含んでいる。$\boxed{18}$ で調べたように、どこまでも続く足し算はしばしば発散してしまう。⑳の足し算が発散してしまっては、解を表した意味がない。つまり、⑳式を用いて問題の特殊解の第 8 項を求めようとしたとき、それを求めるために⑳に含まれるどこまでも続く足し算を実行しなくてはならないのであれば、直接漸化式に代入してひとつずつ項を計算したほうがよっぽど簡単である。

グリーン数列を具体的に書き表してみると、線形な付帯条件 $a_1 = 0$ のおかげでこの困難が回避できることがわかる。

式⑳のグリーン数列は式⑲で与えられている。いくつかの m について、基本数列 $e_n^{(m)}$ に対応するグリーン数列の最初の何項かを具体的に書き並べてみよう。

まず $G_n^{(1)} = \begin{cases} 0 & (1 \leqq n \leqq 1) \\ 2^{n-2} & (2 \leqq n) \end{cases}$ であるから、最初の何項かは

$$G_n^{(1)} : 0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64, \cdots$$

次に $G_n^{(2)} = \begin{cases} 0 & (1 \leqq n \leqq 2) \\ 2^{n-3} & (3 \leqq n) \end{cases}$ であるから、

$$G_n^{(2)} : 0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32, \cdots。$$

以下同様にグリーン数列の最初のほうを計算して表にしてみよう。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$G_n^{(1)}$	0	1	2	4	8	16	32	64	128
$G_n^{(2)}$	0	0	1	2	4	8	16	32	64
$G_n^{(3)}$	0	0	0	1	2	4	8	16	32
$G_n^{(4)}$	0	0	0	0	1	2	4	8	16
$G_n^{(5)}$	0	0	0	0	0	1	2	4	8
$G_n^{(6)}$	0	0	0	0	0	0	1	2	4
$G_n^{(7)}$	0	0	0	0	0	0	0	1	2
$G_n^{(8)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	1

この表の左下の部分は大きくゼロだけの部分で占められている。今まではあるグリーン数列について項を順番にたどっていったが、今度は項の番号を固定してグリーン数列をはじめから順番にたどっていこう。たとえばグリーン数列の第 8 項 $(n=8)$ に注目する。グリーン数列を順番にたどると、$G_8^{(1)}\ G_8^{(2)} \cdots G_8^{(7)}$ はゼロでない値

をとるが、それより大きな m の値については $G_8^{(m)}=0$ である。つまり $G_8^{(m)}=0,(8\leqq m)$。

式⑲を用いて特殊解の第 8 項を計算してみよう。

$$a_8 = f_1G_8^{(1)} + f_2G_8^{(2)} + f_3G_8^{(3)} + \cdots + f_mG_8^{(m)} + \cdots$$

というどこまでも続く足し算になるが、$8\leqq m$ の部分は全部ゼロなので、この和は最初の 7 項だけ計算すればよい。すなわち

$$a_8 = f_1G_8^{(1)} + f_2G_8^{(2)} + f_3G_8^{(3)} + \cdots + f_7G_8^{(7)} = \sum_{m=1}^{7} f_mG_8^{(m)}$$

ゼロでないグリーン数列の値は式⑲で $n=8$ と置くことによって得られる。すなわち

$$G_8^{(m)} = 2^{7-m}\ (1\leqq m\leqq 7)。$$

$8\leqq m$ も場合も合わせて表すと

$$G_8^{(m)} = \begin{cases} 2^{7-m} & (1\leqq m\leqq 7) \\ 0 & (8\leqq m) \end{cases}。$$

これを用いて

$$a_8 = f_1G_8^{(1)} + f_2G_8^{(2)} + f_3G_8^{(3)} + \cdots + f_7G_8^{(7)} = \sum_{m=1}^{7} f_mG_8^{(m)} = \sum_{m=1}^{7} 2^{7-m} f_m。$$

他の項の場合にも、n を固定して m を動かして考えると

$$G_n^{(m)} = \begin{cases} 2^{n-m-1} & (1\leqq m\leqq n-1) \\ 0 & (n\leqq m) \end{cases}$$

であるから

$$\begin{aligned} a_n &= f_1G_n^{(1)} + f_2G_n^{(2)} + f_3G_n^{(3)} + \cdots + f_mG_n^{(m)} + \cdots \\ &= f_1G_n^{(1)} + f_2G_n^{(2)} + f_3G_n^{(3)} + \cdots + f_mG_n^{(m)} + \cdots f_nG_n^{(n-1)} = \sum_{m=1}^{n-1} f_mG_n^{(m)} = \sum_{m=1}^{n-1} 2^{n-m-1} f_m \end{aligned}$$

答：$a_n = \displaystyle\sum_{m=1}^{n-1} 2^{n-m-1} f_m$

非斉次項の数列 f_n を定めたとき、ここで与えた和さえ計算すれば、漸化式と付帯条件を満たす数列の一般項が自動的に求まる。

どんな漸化式でもグリーン数列さえ求まっていれば、任意の非斉次項に対して、線形な付帯条件を満たす特殊解を和の形で表すことができる。例題 20 でグリーン数列を求めた漸化式で、特殊解を構成してみよう。

例題 24

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = f_n,\ a_1 = a_2 = 0$$

例題 23 とまったく同様にして、形式的な解を求めることができる。非斉次項を基本数列で展開したものに、基本数列の代わりにグリーン数列を代入すると

$$a_n = f_1 G_n^{(1)} + f_2 G_n^{(2)} + f_3 G_n^{(3)} + \cdots + f_m G_n^{(m)} + \cdots = \sum_{m=1}^{\infty} f_m G_n^{(m)} \quad \cdots ⑳$$

ここで⑱よりグリーン数列が

$$G_n^{(m)} = \begin{cases} 0 & (1 \leqq n \leqq m) \\ 3^{n-m-1} - 2^{n-m-1} & (m+1 \leqq n) \end{cases}$$

で与えられるからこれを m を固定した見方から、 n を固定した見方に変えて表す。

$$G_n^{(m)} = \begin{cases} 3^{n-m-1} - 2^{n-m-1} & (1 \leqq m \leqq n-1) \\ 0 & (n \leqq m) \end{cases}$$

ただし、 $m = n-1$ のとき、 $3^{n-m-1} - 2^{n-m-1} = 3^{n-(n-1)-1} - 2^{n-(n-1)-1} = 3^0 - 2^0 = 0$ であるが、このままの形では $m = n-1$ のときゼロであることがわかりにくい。場合分けの区切りを変更して

$$G_n^{(m)} = \begin{cases} 3^{n-m-1} - 2^{n-m-1} & (1 \leqq m \leqq n-2) \\ 0 & (n-1 \leqq m) \end{cases}$$

としておこう。

式⑳のどこまでも続く和で $G_n^{(m)}$ がゼロでない部分だけ取り出すとそれは $1 \leqq m \leqq n-2$ の部分であるから、式⑳は

$$a_n = \sum_{m=1}^{n-2} f_m G_n^{(m)} = \sum_{m=1}^{n-2} \left(3^{n-m-1} - 2^{n-m-1}\right) f_m$$

ここまでで基本的なアイディアはすべて述べたので、いろいろな形の線形漸化式でグリーン数列を求めることは読者の演習とする。

練習 23

r は定数とする。非斉次漸化式と付帯条件の組

$a_{n+1} = r a_n + f_n, \quad a_1 = 0$ について

(1)グリーン数列を求めよ。

(2)グリーン数列を利用して、上記の付帯条件を満たす特殊解を求めよ。

練習 24

r, s は互いに異なる定数とする。非斉次漸化式と付帯条件の組

$a_{n+2} - (r+s) a_{n+1} + rs a_n = f_n, \quad a_1 = a_2 = 0$ について

(1)グリーン数列を求めよ。

(2)グリーン数列を利用して、上記の付帯条件を満たす特殊解を求めよ。

練習 25

r は定数とする。非斉次漸化式と付帯条件の組

$a_{n+2} - 2r a_{n+1} + r^2 a_n = f_n, \quad a_1 = a_2 = 0$ について

(1)グリーン数列を求めよ。

(2)グリーン数列を利用して、上記の付帯条件を満たす特殊解を求めよ。

練習 26

例題 15 の漸化式に非斉次項を付け加えた問題

$(2n-1)a_{n+2}-2(4n-1)a_{n+1}+3(2n+1)a_n=f_n$，$a_1=0,\ a_2=0$ について

(1)グリーン数列を求めよ。

(2)グリーン数列を利用して、上記の付帯条件を満たす特殊解を求めよ。

注記：

グリーン数列を利用すると、線形漸化式の非斉次項の形に関わらず、すべて同じ方法で特殊解を書き下すことができる。特殊解がひとつ求まれば、§３で解説した方法で、どんな付帯条件のもとでの特殊解も求めることができる。その意味で、グリーン数列は線形漸化式の最終兵器である。ただし、具体的な問題に当たってみた読者はすでにお気づきのことと思うが、グリーン数列を利用した特殊解には必ず数列の和の計算が含まれている。すなわち $a_n=\sum_{m=1}^{n\text{の式}} f_m G_n^{(m)}$ という和の計算である。具体的な f_n を与えた場合、特殊なものを除き、この和をまとまった形で表すことは不可能である。したがって、この段階ではグリーン数列は実用的な道具というよりは、線形漸化式の特殊解の構造を理論的に把握するのに役立つといっておくのが無難であろう。

$\boxed{\text{付録}}$　逆行列としてのグリーン数列

例題 24 の漸化式を例にとって、線形漸化式がある意味で行列とベクトルの問題であることを確認してみよう。問題の漸化式は

$$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=f_n$$

である。とりあえず付帯条件は除外しておこう。

$n=1$ とおくと

$$a_3-5a_2+6a_1=f_1$$

順番を入れ替えて

$$6a_1-5a_2+a_3=f_1$$

であるが、左辺はベクトル $(1,\ \ -5,\ \ 6)$ とベクトル $(a_3,\ a_2,\ a_1)$ の内積と考えることができる。内積は、行ベクトルを列ベクトルの左側から行列としてかけたものとみなせるから

$$(6,\ \ -5,\ \ 1)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}=f_1$$

と表すことができる。また、この掛け算は、実はもっと規模の大きな内積の一部分が現れたものと考えることもできる。つまり、3 成分ベクトルではなくて、もっと多成分のベクトルだと考える。例えば、

$$\begin{pmatrix}6, & -5, & 1, & 0, & 0, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\\a_6\end{pmatrix}=f_1$$

と書いてもいい。いくら多成分のベクトルでも、行ベクトルの最初の 3 成分以外がすべてゼロであれば、全く同じことである。ここで思い切ってベクトルの成分の数を無限大にまで拡張してみよう。つまり、

$$\begin{pmatrix}6, & -5, & 1, & 0, & 0, & \cdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\\\vdots\end{pmatrix}=f_1\cdots(1)$$

無限個の成分があっても、行ベクトルの最初の 3 成分以外がすべてゼロであれば同じことである。

$n=2$ のときの式も同じように表してみよう。

$$a_4-5a_3+6a_3=f_2$$

であるから、同様にして

$$\begin{pmatrix}6, & -5, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}=f_2$$

であるが、無限個の成分にするときに、列ベクトルが a_2 から始まるのが気になるので、少し修正しよう。

$$\begin{pmatrix}0, & 6, & -5, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}=f_2$$

としておけば、無限個の成分にしたときに、列ベクトルを $n=1$ の場合と共通に取れる。つまり

$$\begin{pmatrix}0, & 6, & -5, & 1, & 0, & 0, & \cdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\\\vdots\end{pmatrix}=f_2\cdots(2)$$

(1)、(2)の二組を縦に 2 行に並べて行列の掛け算にすることができる。

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 6 & -5 & 1 & 0 & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

この手続きを$n=3$以降も続けていくことによって、次のような巨大な行列とベクトルの式を得る。

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots \\ 0 & 6 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0\cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -5 & 1 & 0 & 0\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ \vdots \end{pmatrix} \cdots(3)$$

(3)の式はあまりにも巨大なので、簡略化して次のように表すことにしよう。

$$M\vec{A} = \vec{F} \cdots(4)$$

漸化式の解を求めるということはこの行列の一次方程式を解くということである。ところが、3 項間漸化式の一般解は二つのパラメータを含むから、解は一つに決まらない。それは、行列M が逆行列を持たないということである。

さて、いよいよグリーン数列を考えよう。第 1 成分だけが 1 で、ほかの成分がすべて 0 であるような基本数列$e_n^{(1)}$を非斉次項とするグリーン数列$G_n^{(1)}$を考えよう。ベクトルの記号

$$\overrightarrow{G^{(1)}} = \begin{pmatrix} G_1^{(1)} \\ G_2^{(1)} \\ G_3^{(1)} \\ G_4^{(1)} \\ \vdots \end{pmatrix}, \overrightarrow{E^{(1)}} = \begin{pmatrix} e_1^{(1)} \\ e_2^{(1)} \\ e_3^{(1)} \\ e_4^{(1)} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

を用いると、このグリーン数列を求める問題は

$$M\overrightarrow{G^{(1)}} = \overrightarrow{E^{(1)}}$$

と表せる。同様に、第 2 成分だけが 1 でそのほかがゼロである基本数列$e_n^{(2)}$に対するグリーン数列の問題は

$$M\overrightarrow{G^{(2)}} = \overrightarrow{E^{(2)}}$$

と表せる。

これら、グリーン数列を求める問題を複数横に並べて行列の掛け算の形に表すことができる。

$$M\left(\overrightarrow{G^{(1)}}, \overrightarrow{G^{(2)}}\right) = \left(\overrightarrow{E^{(1)}}, \overrightarrow{E^{(2)}}\right)$$

列ベクトルを二つ横に並べたものは 2 列の行列とみなす。具体的イメージがわきにくいかもしれないので、成分を全部書いてみると

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots \\ 0 & 6 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0\cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -5 & 1 & 0 & 0\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1^{(1)} & G_1^{(2)} \\ G_2^{(1)} & G_2^{(2)} \\ G_3^{(1)} & G_3^{(2)} \\ G_4^{(1)} & G_4^{(2)} \\ G_5^{(1)} & G_5^{(2)} \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^{(1)} & e_1^{(2)} \\ e_2^{(1)} & e_2^{(2)} \\ e_3^{(1)} & e_3^{(2)} \\ e_4^{(1)} & e_4^{(2)} \\ e_5^{(1)} & e_5^{(2)} \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

となる。ここで、基本数列は定まった数列なので、具体的に成分を代入すると

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots \\ 0 & 6 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0\cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -5 & 1 & 0 & 0\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1^{(1)} & G_1^{(2)} \\ G_2^{(1)} & G_2^{(2)} \\ G_3^{(1)} & G_3^{(2)} \\ G_4^{(1)} & G_4^{(2)} \\ G_5^{(1)} & G_5^{(2)} \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

3 番目以降の基本数列でも、同様にしてグリーン数列の問題を並べて表すと、

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots \\ 0 & 6 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0\cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -5 & 1 & 0 & 0\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1^{(1)} & G_1^{(2)} & G_1^{(3)} & \cdots \\ G_2^{(1)} & G_2^{(2)} & G_2^{(3)} & \cdots \\ G_3^{(1)} & G_3^{(2)} & G_3^{(3)} & \cdots \\ G_4^{(1)} & G_4^{(2)} & G_4^{(3)} & \cdots \\ G_5^{(1)} & G_5^{(2)} & G_5^{(3)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^{(1)} & e_1^{(2)} & e_1^{(3)} & \cdots \\ e_2^{(1)} & e_2^{(2)} & e_2^{(3)} & \cdots \\ e_3^{(1)} & e_3^{(2)} & e_3^{(3)} & \cdots \\ e_4^{(1)} & e_4^{(2)} & e_4^{(3)} & \cdots \\ e_5^{(1)} & e_5^{(2)} & e_5^{(3)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

基本数列の成分を具体的に書くと

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots \\ 0 & 6 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\cdots \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0\cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -5 & 1 & 0 & 0\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1^{(1)} & G_1^{(2)} & G_1^{(3)} & \cdots \\ G_2^{(1)} & G_2^{(2)} & G_2^{(3)} & \cdots \\ G_3^{(1)} & G_3^{(2)} & G_3^{(3)} & \cdots \\ G_4^{(1)} & G_4^{(2)} & G_4^{(3)} & \cdots \\ G_5^{(1)} & G_5^{(2)} & G_5^{(3)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

これを行列の掛け算として

$$MG = E$$

と表すことができる。ところでこの式の右辺の行列 E は対角成分が 1 でそのほかの成分がすべて 0 の行列だから、単位行列である。2 つの行列 M, G は互いに掛け合わせると単位行列 E になる。これは、2 つの行列 M, G がお互いに逆行列であることを表している。つまり

$$G = M^{-1}$$

である。

漸化式のグリーン数列を求めるという問題は、じつは漸化式を表す行列 M の逆行列を求める問題なのてあった。ひとたび逆行列が求まれば、非斉次線型漸化式

$M\vec{A} = \vec{F} \cdots (4)$

の解法は、形式的には極めて単純である。この式の両辺に左から$G = M^{-1}$をかけると

$$M^{-1}M\vec{A} = M^{-1}\vec{F}$$

$$E\vec{A} = G\vec{F}$$

$$\vec{A} = G\vec{F}$$

となり、漸化式の解が求まる。$\boxed{17}$で調べた特殊解

$$s_n = f_1 G_n^{(1)} + f_2 G_n^{(2)} + \cdots + f_M G_n^{(M)} = \sum_{m=1}^{M} f_m G_n^{(m)}$$

は、この右辺の行列の掛け算$G\vec{F}$の第n成分を表している。

このように、グリーン数列を求める問題は、一種の逆行列を求める問題だと解釈することができる。逆行列さえ求めてしまえば、連立方程式を解くのは行列の掛け算だけで終わってしまう。数列の場合は、グリーン数列さえ求めてしまえば、漸化式を解くのは数列の和の計算だけだということである。

ただし、この一種の「比喩」は大変わかりやすいが、危険でもある。なぜならば、高校で学ぶ行列の理論は、無限に続く行列やベクトルを念頭に置いていないからだ。そのための困難は、実はすでに表れている。(3)式のすぐ下の、次の注釈を覚えているだろうか。

3 項間漸化式の一般解は二つのパラメータを含むから、解は一つに決まらない。それは、行列Mが逆行列を持たないということである。

行列Mは連立方程式の性質から、逆行列を持たないはずなのに、グリーン数列をかけると単位行列になってしまう。これは、有限の行列の世界ではありえないことである。漸化式の一般解ではなく、線型な付帯条件を含めて問題を考えていることが、逆行列と解釈できることと関連していると考えられる。ここで得た結論は、数学的には不完全であるということを心にとめて、読者各自でさらに追及してほしい。